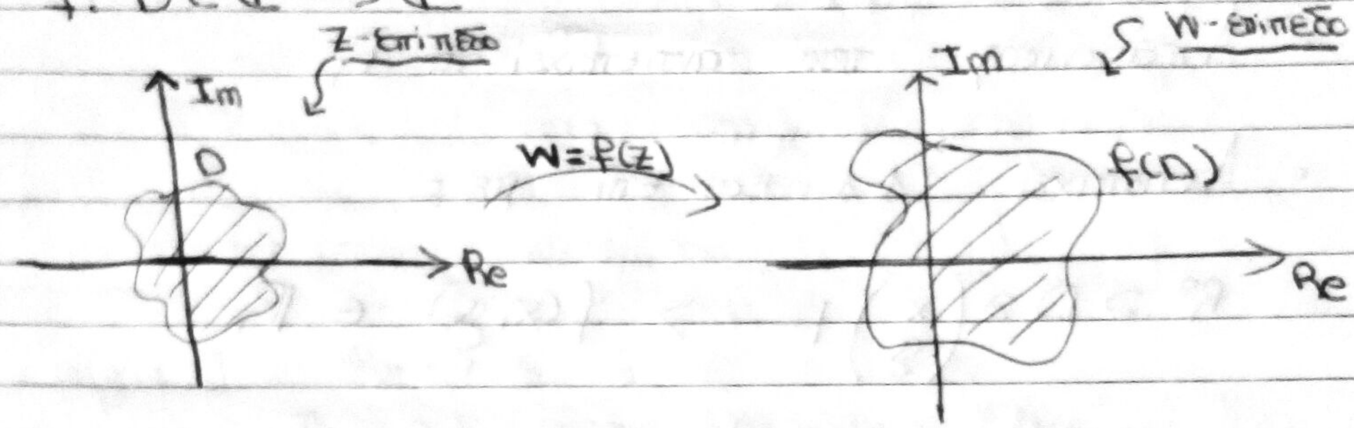
Μάθημα 8ο 10/04/2020

Παρασκευή 10.4.2020 [τελευταίο μάθημα πριν το Πάσχα
Μετά το Πάσχα: μάθημα Πέμπτη και Παρασκευή]
Στόχος έως τότε: καλή γνώση με ασκήσεις όρια και συνέχεια συναρτήσεων (σελ. μέχρι §2.4 στις σημειώσεις)

Συναρτήσεις με τις οποίες θα δουλεύουμε

(α) $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$




$$\mathbb{C} \supset D \ni z \longmapsto f(z) \in \mathbb{C}$$

$$f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)$$
$$f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$$

όπου $\boxed{z = x+iy}$

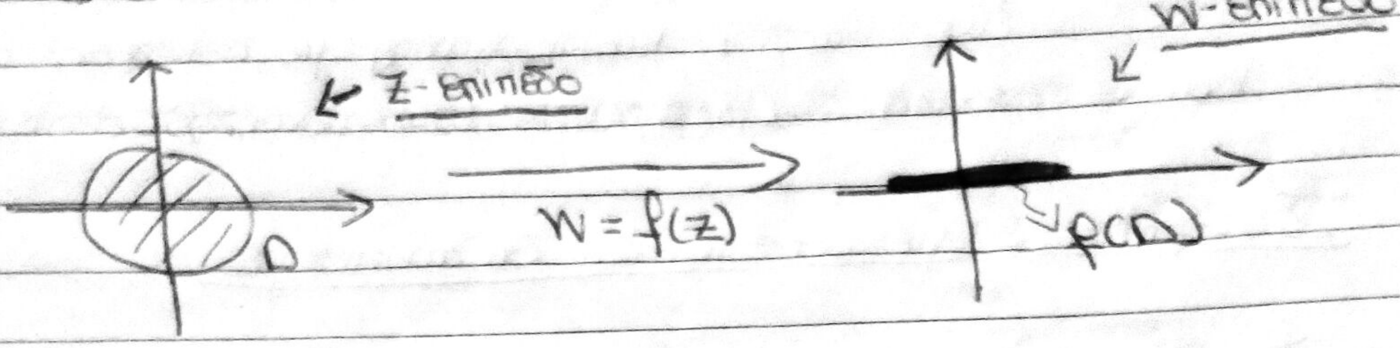
Η $f$ αυτή αντιστοιχεί "1-1" και "επί" στο διανυσματικό πεδίο από το $D \subset \mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

[σχόλιο: άλλες φορές μας βολεύει η περιγραφή
$z \longmapsto f(z)$ και άλλες η $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ ]

[υποπερίπτωση του (α)]

$f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$




- Απεικόνιση από τον $R^2$ στο $R$.
- Αντιστοιχεί 1-1 και επί με:

$$\mathbb{R}^2 \supset D \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$$

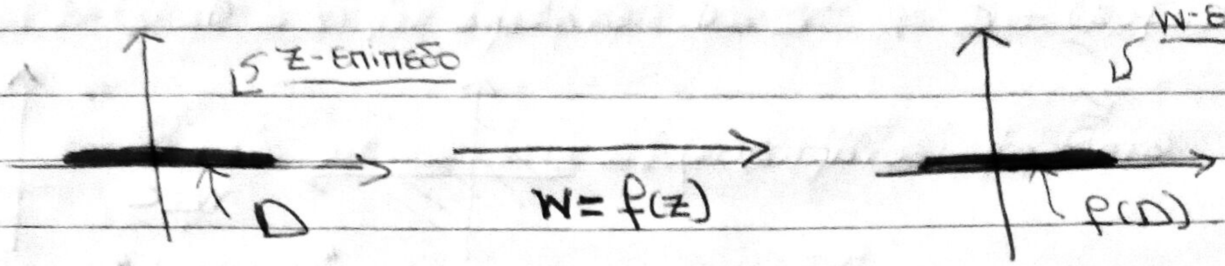
ή

$$\mathbb{C} \supset D \ni z \longmapsto f(z) \in \mathbb{R}$$

[Προσοχή: συμβολίζουμε ακριβώς το ίδιο το $D \subset \mathbb{C}$ με το $D \subset \mathbb{R}^2$, όπως -συνήθως-

$f(x,y) = f(\underbrace{x+iy}_{=z})$. Προτιμούμε το δεύτερο] γ) [ υποπερίπτωση του (β) ]

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

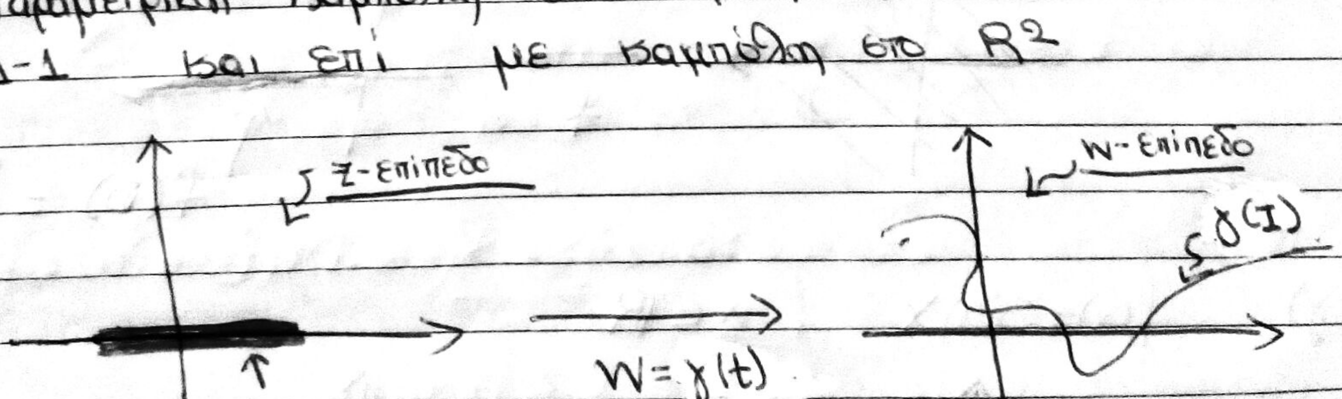



- Αντιστοιχούν προφανώς με συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, όπως τις ξέρουμε

δ) [ δεν είναι υποπερίπτωση του (γ), (β) ]

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ , $I$ : διάστημα

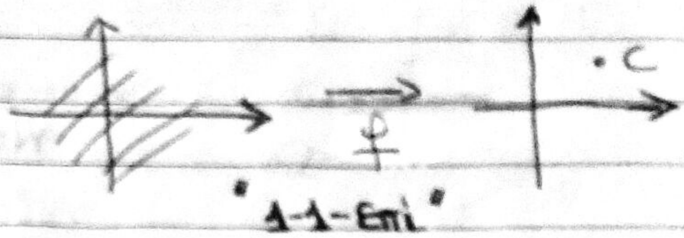
- Αν η "γ" είναι συνεχής (θα το δούμε) ονομάζεται παραμετρική καμπύλη στο $\mathbb{C}$, η οποία αντιστοιχεί 1-1 και επί με καμπύλη στο $R^2$



Παραδείγματα (κάποιες βασικές συναρτήσεις για καθεμιά από τις περιπτώσεις)

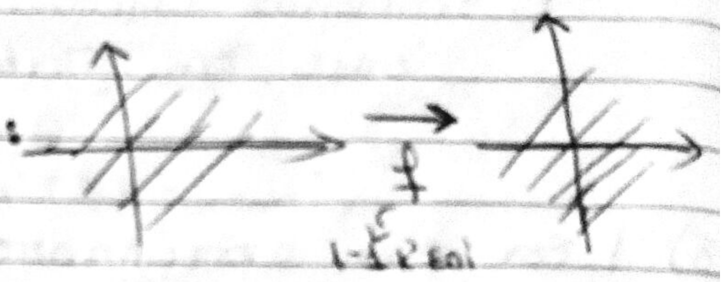
(α) • $f(z) = c$, $c \in \mathbb{C}$: σταθερά, $z \in \mathbb{C}$

σταθερή συνάρτηση:



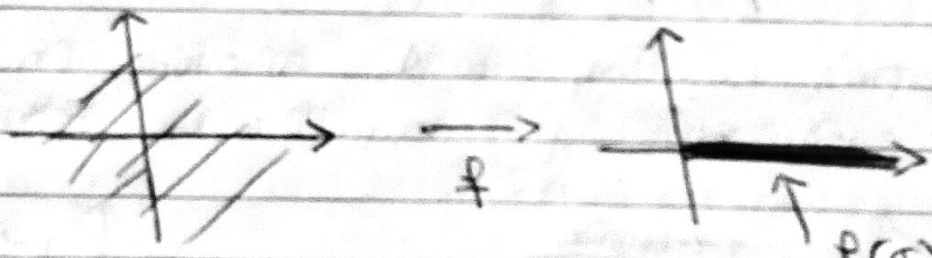

• $f(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$

ταυτοτική συνάρτηση:



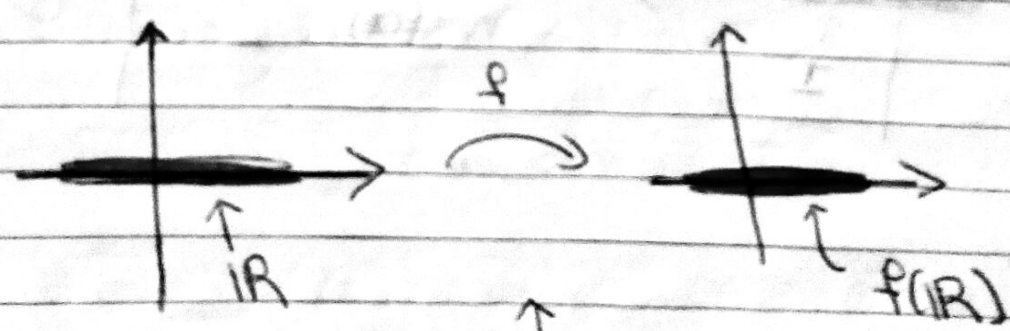

(β) $f(z) = |z|^2$, $z \in \mathbb{C}$

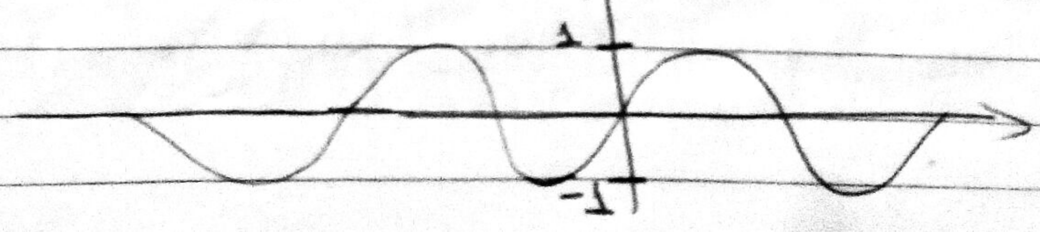
Αντιστοιχεί στην $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$




$f(\mathbb{C}) = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$

(γ) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

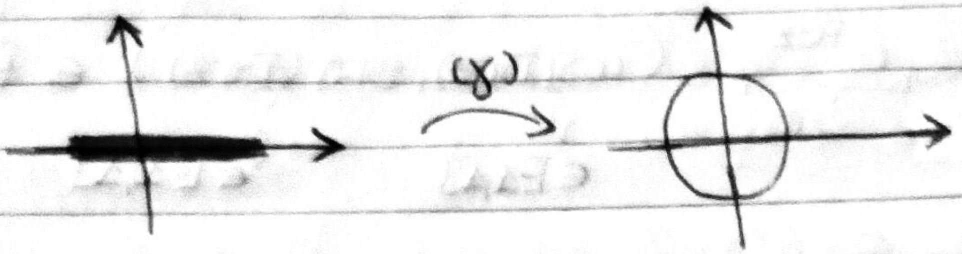


(δ) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$

Αντιστοιχεί 1-1 και επί στην:

$$\boxed{\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t}$$




<u>ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ</u>

$$f(z) = Re(f(z)) + i \cdot Im(f(z))$$

- $Re\, f : D \subset \mathbb{C} \to R$ με $Re\, f(z) = Re(f(z))$.
- $Im\, f : D \subset \mathbb{C} \to R$ με $Im\, f(z) = Im(f(z))$.
- <u>Λογαριθμική συνάρτηση</u>: $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$
- <u>Εκθετική συνάρτηση</u>: $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

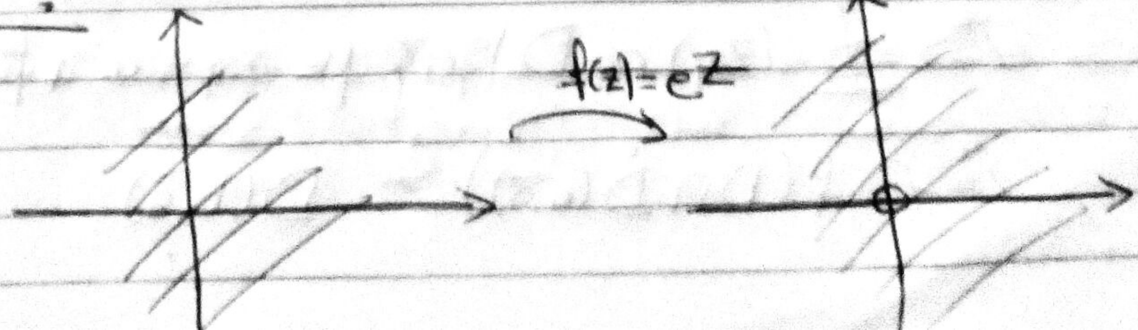
<u>π.χ.</u>

Η $f : x \mapsto e^x$, $x \in R$:

η οποία επεκτείνεται στην

$\tilde{f} : z \mapsto e^z$, $z \in \mathbb{C}$.

<u>Σχήμα</u>:



## Τι τιμές παίρνει η $f(z)=e^z$ ???

$$\tilde{f}(z)=e^z=e^{Re z}\cdot e^{i Im z} \quad (\text{αφού } e^{x+iy}=e^x e^{iy})$$

$$=e^{Re z}\cdot\left(\cos(Im z)+i\cdot \sin(Im z)\right)$$

$$=\underbrace{e^{Re z}}_{>0}\cdot\left(\underbrace{\cos(Im z)}_{\in[-1,1]},\ \underbrace{\sin(Im z)}_{\in[-1,1]}\right)\in \mathbb{R}^2$$

- $Re\,\tilde{f}(z)=e^{Re z}\cdot\cos(Im z)$.
- $Im\,\tilde{f}(z)=e^{Re z}\cdot\sin(Im z)$

<u>Ορισμός</u> (<u>Σύγκλισης συνάρτησης</u>) (2.3.8)

- $f: D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $a\in\mathbb{C}$: σημείο συσσώρευσης του $D \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow D\cap D(a,\delta)\neq\emptyset$,

και $b\in\mathbb{C}$, τότε $\lim\limits_{z\to a} f(z)=b \overset{*}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{*}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall z\in D\cap\dot{D}(a,\delta): f(z)\in D(b,\varepsilon)$$

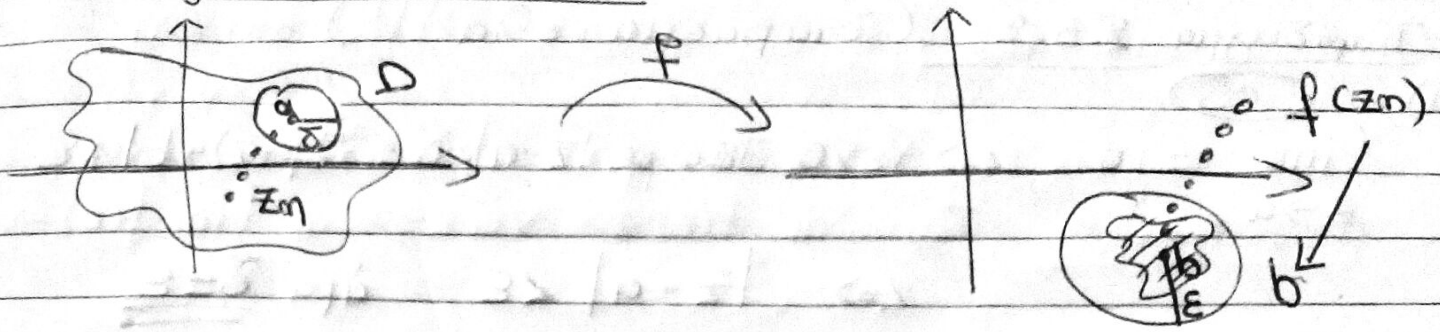
[όπου $\dot{D}(a,\delta)=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z-a|<\delta\}$

ενώ $D(b,\varepsilon)=\{w\in\mathbb{C}: |w-b|<\varepsilon\}$

$$\overset{*}{\Leftrightarrow} \forall\ (z_n)\subset D\setminus\{a\} \text{ με } z_n\to a : f(z_n)\to b$$

$$\overset{*}{\Leftrightarrow} f(D\cap\dot{D}(a,\delta))\subset D(b,\varepsilon)$$

Σχήμα για την εισήγηση :




Πρόταση 2.3.2 : βασικά $\left\{\begin{matrix}(2.22)\\(2.23)\end{matrix}\right.$ αλλά διαβάζω και τις άλλες.

$$\lim_{z\to a} f(z) = b \iff \lim_{z\to a} |f(z)-b| = 0 \quad (2.21).$$

$$\iff \lim_{z\to a} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} b \text{ και}$$

$$\lim_{z\to a} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} b \quad (2.22)$$

$$\iff \forall (z_n) \subset D \setminus \{a\},\ z_n \to a : f(z_n) \to b.$$

(2.23)

Παρατήρηση 2.3.3

$$\lim_{z\to a} f(z) = b \iff \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\operatorname{Re} b\\ \operatorname{Im} b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\iff \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} u(x,y) = b_1 \text{ και}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} v(x,y) = b_2$$

Παράδειγμα 2.3.2 (διαβασμα όλα !!!)

(α) SOS

- $\lim_{z\to a} = a \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ με $|z-a|<\delta : |f(z)-b|<\varepsilon$

$\iff |z-a|<\varepsilon$ άρα $\delta=\varepsilon$

- $\lim_{z\to a} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} a$

Παίρνω ορισμό και $|\operatorname{Re} z-\operatorname{Re} a| = |\operatorname{Re}(z-a)| \leq |z-a|$

Άρα από τον ορισμό $\delta=\varepsilon$ Άρα το

$$\lim_{z\to a} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} a$$

(β) → SOS

$$\lim_{z\to a} \frac{z^n-a^n}{z^m-a^m} = \frac{n}{m}\cdot a^{n-m}$$

SOS !! → Διαβασε την απόδειξη (πως προκύπτει το $\frac{n}{m}\cdot a^{n-m}$)

(γ) SOS

Το $\lim_{z\to 0} \frac{\bar z}{z}$ δεν υπάρχει

$$\frac{\bar z}{z} = \frac{\bar z\,\bar z}{z\,\bar z} = \frac{\bar z^2}{|z|^2} = \frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \ i\ \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Από Παρατήρηση 2.3.3, τα $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ και

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχουν. Άρα δεν υπάρχει

και το όριο: $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$

Ορισμός: (SOS) (2.3.3)

$f: D \to \mathbb{C}$, $\boxed{D \subset \mathbb{C}}$

(α) Αν $a \in \mathbb{C}$ σημείο συσσώρευσης του $D$, τότε λέμε ότι η $f$ τείνει στο άπειρο, όταν το $z$ τείνει στο $a$, συμβολικά $f(z) \to \infty$ ή

$\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty \iff$

$\iff \forall r>0 \ \exists \delta>0, \ \forall z \in D, \ 0<|z-a|<\delta : |f(z)|>r$

(β) Αν $D$ μη φραγμένο, τότε λέμε ότι η $f$ συγκλίνει στο $b \in \mathbb{C}$, όταν το $z$ τείνει στο άπειρο, δηλαδή $f(z) \to b$ για $z \to \infty$ ή

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = b \iff$

$\iff \forall \varepsilon>0 \ \exists r>0 \ \forall z \in D, \ |z|>r : |f(z)-b|<\varepsilon$

(γ) Αν $D$ - μη φραγμένο, τότε λέμε ότι η $f$ τείνει στο άπειρο όταν το $z$ τείνει στο άπειρο, δηλαδή $f(z) \to \infty$ για $z \to \infty$ ή $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall r>0 \ \exists \rho>0, \ |z|>\rho : |f(z)| > r$$

Ακολουθιακοί Ορισμοί - Πρόταση 2.3.4.

(α) $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall (z_n) \subset D \setminus \{a\}, z_n \to a$ το $f(z_n) \to \infty$

(β) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = b \Leftrightarrow \forall (z_n) \subset D, \ z_n \to \infty$ το $f(z_n) \to b$

(γ) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall (z_n) \subset D, \ z_n \to \infty$ το $f(z_n) \to \infty$.

[Προσοχή!!! Και στις 3 περιπτώσεις λέει για κάθε]

Παρατήρηση 2.3.4

(α) Ο ορισμός (2.3.2) της σύγκλισης επεκτείνει την σύγκλιση των πραγματικών συναρτήσεων $f: D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$

(β) $D(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}, \ r>0$

ΕΡΓΑΣΙΑ: Η.Ω: Α 38, Α.37, Α.40, Α 39 (SOS) πάλιο θέμα

Παραδείγματα

(1) (Α37) το $\lim_{z \to a} \frac{1}{(z-a)^k} = \infty$, $a \in \mathbb{C}$.

αποδ. $\forall (z_n) \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$ με $z_n \to a$: $\frac{1}{(z-a)^k} \to \infty$:

- $z_n \to a \Leftrightarrow |z_n - a| \to 0$ (από ΑΠ.Ι + ΟΡΙΣΜΟΣ)
- $\frac{1}{(z-a)^k} \to \infty \Leftrightarrow \frac{1}{|z-a|^k} \to \infty \Leftrightarrow |z_n - a|^k \to 0$.
- ΑΛΙ: $x \mapsto x^k$: είναι συνεχής
  (αλλιώς με άλγεβρα ορίων ή ακολουθιών)

(2) $\lim_{z \to \infty} e^z = ???$ (SOS)

Παίρνουμε δυο διαφορετικές ακολουθίες:

- $z_n = n \in \mathbb{N}$ έχουμε $z_n \to \infty$ $[\Leftrightarrow |z_n| \to \infty \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow |n| = n \to \infty]$ και $e^{z_n} = e^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

$[e^{-n} = \frac{1}{e^n} \to 0$ από ΑΠ.Ι$]$

- $z_n = 2\pi i n$: $e^{z_n} = e^{2\pi i n} = 1$ για $n \to \infty$

Άρα το όριο $\lim_{z \to \infty} e^z$ **δεν υπάρχει**.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ !!! Πότε η εκθετική συνάρτηση στο μιγαδικό επίπεδο είναι φραγμένη ???

* Όταν η εκθετική είναι φραγμένη τότε ΜΟΝΟ τείνει στο άπειρ

Απάντηση

Όταν $\exists\, a \in \mathbb{R}$ με $\operatorname{Re} z \leq a$, $\forall z \in D$

τότε η $\exp : D \to \mathbb{C}$ είναι φραγμένη

γιατί τότε: $\forall z \in D$:

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \leq e^a < \infty.$$

Ορισμός 2.4.1 (συνέχεια συνάρτησης).

Η $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, ονομάζεται:

(α) συνεχής στο $\boxed{a \in D}$ αν:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in D,\ |z-a| < \delta : |f(z) - f(a)| < \varepsilon$$

(β) συνεχής στο $E \subset D$, αν είναι συνεχής σε κάθε $a \in E$

(γ) συνεχής, αν είναι συνεχής σε κάθε $a \in D$

(δ) ομοιόμορφα συνεχής αν,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z, w \in D,\ |z-w| < \delta : |f(z) - f(w)| < \varepsilon$$

Πρόταση 2.4.1 (Ιδιότητες Συνέχειας)

(α) Η $f$ συνεχής στο $a \iff \forall (z_n) \subset D,\ z_n \to a : f(z_n) \to f(a)$

(β) Αν "$a \in \mathbb{C}$ μεμονωμένο σημείο του $D$, τότε $f$ συνεχής στο "$a$".

(γ) Αν "$a$" σημείο συσσώρευσης του $D$, τότε

$$f \text{ συνεχής στο } a \iff \lim_{z \to a} f(z) = f(a).$$

(ε) Αν $f, g : D \to \mathbb{C}$ συνεχείς στο "$a$", τότε είναι συνεχείς στο "$a$" και οι:

$$f+g,\quad f\cdot g,\quad \frac{f}{g} \text{ με } g(z) \neq 0 .$$

(i) SOS Η $f$ συνεχής στο $a \iff \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο "$a$".

Παραδείγματα (συνεχών συναρτήσεων)

① Η ταυτοτική, η συνάρτηση συζυγούς, φανταστικού, πραγματικού μέρους και η συνάρτηση απόλυτης τιμής.
[Σχόλιο: η απόδειξη ότι οι παραπάνω συναρτήσεις είναι συνεχείς προκύπτει από το παράδειγμα 2.3.2 ].

② Τα πολυώνυμα οποιουδήποτε βαθμού των $z$, $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ και οι συνδυασμοί τους είναι επίσης συνεχείς. Οι ρητές συναρτήσεις αυτών των συναρτήσεων είναι συνεχείς.
[ Σχόλιο: από άλγεβρα και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων ]

③ SOS $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $\exp z = e^z$ είναι **συνεχής**, αφού

$$e^z = e^{\mathrm{Re}z + i\,\mathrm{Im}z} = e^{\mathrm{Re}z} \cdot e^{i\,\mathrm{Im}z} = e^{\mathrm{Re}z}\left(\cos(\mathrm{Im}z) + i\sin(\mathrm{Im}z)\right)$$

και οι πραγματικές συναρτήσεις μιγαδικής μεταβλητής $\mathrm{Re}, \mathrm{Im}: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ καθώς και οι $\cos, \sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς $\Rightarrow$ $e^z$: συνεχής συνάρτηση.

④ SUPER-DUPER SOS

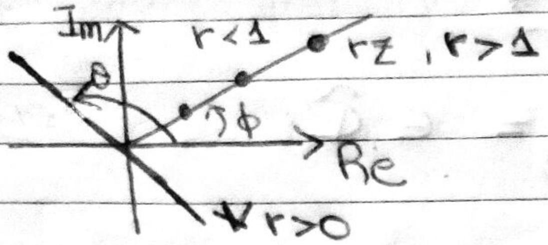
$\boxed{\text{Η } \mathrm{Arg}: \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi] \text{ είναι συνεχής ΜΟΝΟ στο } \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]}$

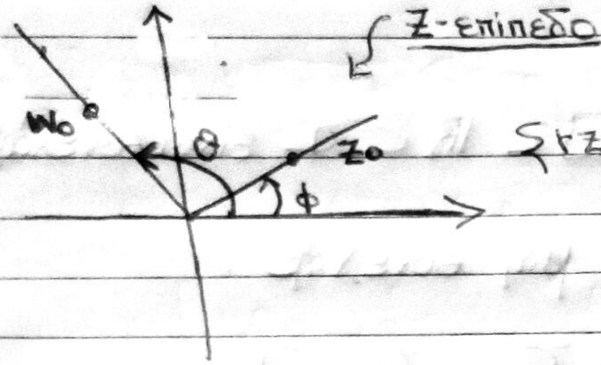
όπου $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] = \{ z \in \mathbb{C} : z \notin (-\infty, 0] \}$

$= \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y = 0 \}$

$$\underbrace{\mathrm{Arg}(x+iy)}_{\in \mathbb{C}^*} = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}, & x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \arctan \frac{y}{x}, & x < 0, y < 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

- $\operatorname{Arg} : \{z \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Im} z \geq 0\} \to (-\pi, \pi]$
- $\operatorname{Arg} z = \phi \quad [\operatorname{Arg}(rz) = \operatorname{Arg} z]$.




$(z_0 \neq 0)$

$\{r z_0 : r > 0\}$

- $y = \operatorname{Arg} z_0$
- $z_n = \underbrace{\frac{1}{n} z_0}_{\in \{r z_0 : r > 0\}} \to 0$

$$\operatorname{Arg}(\underbrace{r \cdot z_0}_{= r x_0 + r i y_0}) = \operatorname{Arg} \underbrace{z_0}_{= x_0 + i y_0}$$

$$\left[ x_0, y_0 > 0 : \arctan \frac{r y_0}{r x_0} = \arctan \frac{y_0}{x_0} = \operatorname{Arg} z_0 = \phi \right]$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg} z_0 = \phi \longrightarrow \phi .$$

- **Όμως** αν $z_n = \frac{1}{n} w_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ **τότε**

$$\operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg} w_0 = \theta \longrightarrow \theta \quad \text{όπου} \quad \boxed{\theta \neq \phi} \quad \text{με}$$

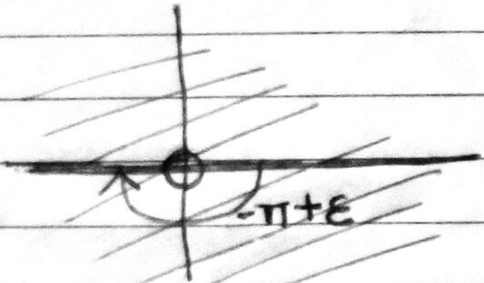
$\theta, \phi \in (-\pi, \pi]$

Άρα δεν ισχύει $\forall \underbrace{z_n}_{\in \mathbb{C}^*} \to 0 \Rightarrow \operatorname{Arg} z_n \to$ στο ίδιο όριο

$$\Leftrightarrow \nexists \lim_{z \to 0} \operatorname{Arg} z \in \tilde{\mathbb{C}}$$

<u>Συνοψίζοντας</u>:

- $\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to (-\pi, \pi] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ είναι συνεχής
- $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi]$ : μη συνεχής
- $\operatorname{Arg} : \{ z \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Im} z \geq 0 \} \to (-\pi, \pi]$ : συνεχής
- $\operatorname{Arg} : \{ z \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Arg} z \in [-\pi + \varepsilon, \pi] \} \to (-\pi, \pi]$ : συνεχής $\forall \varepsilon > 0$




$$\operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg} z_0$$
$$\downarrow$$
για $\operatorname{Im} z_n, \operatorname{Im} z_0 = 0$

→ Διάβασμα το π.χ.: 9.4.4, 9.4.5.

→ Λύσεις των: A 35, A 38, A 41 στο e-course